

# 超不連結コンパクトHausdorff空間と完備Bool代数・ 環の双対性における諸現象の包括的解説

本稿の目的は、位相空間論における「超不連結コンパクトHausdorff空間」の階層構造および各種操作に対する閉包性を、Stone双対性を介して順序集合論（完備Bool代数）および可換環論（Baer Bool環）の観点から包括的かつ自己完結的に解説することである。具体的には、直積操作の下で超不連結性が失われる現象、各種完備化の構造的同値性、そして閉部分集合への移行の際に対称性が崩壊する現象について、すべての定義と証明を明示しながら深く探索する。

## 1. 基礎定義とStone双対性の枠組み

### 【定義】

位相空間  $X$  が**超不連結**（**extremally disconnected**, 以下**ED**と略記）であるとは、 $X$  の任意の開集合  $U \subset X$  に対し、その閉包  $\bar{U}$  が再び開集合（すなわちクロープン集合）となることをいう。

### 【定義】

有界格子  $B$  が**Bool代数**（**Bool束**）であるとは、任意の  $x \in B$  に対して補元  $x' \in B$ （ $x \vee x' = 1$  かつ  $x \wedge x' = 0$ ）が存在し、かつ分配律を満たす格子をいう。さらに、 $B$  の任意の部分集合  $S \subset B$  が上限  $\bigvee S$  および下限  $\bigwedge S$  を持つとき、 $B$  は**完備Bool代数**であるという。

Stoneの表現定理およびその亜種により、**完全不連結コンパクトHausdorff空間の圏**は、**Bool代数の圏**と反変同値である。この双対性のもとで、空間  $X$  にはそのクロープン集合全体のなす代数  $\text{Clopen}(X)$  が対応し、Bool代数  $B$  にはその超フィルター（ultrafilter）全体のなす空間  $\text{Stone}(B)$  が対応する。この対応をさらに進めると、次の極めて重要な同値性が得られる。

### 【命題】

コンパクトHausdorff空間  $X$  が超不連結（ED）であることと、そのクロープン集合のなすBool代数  $\text{Clopen}(X)$  が完備Bool代数であることは同値である。

## 2. 位相空間における直積の非閉包性

空間がEDであるという幾何学的性質は、直積空間へ引き継がれない。これを厳密に示すため、まずはED空間が満たすべき分離性質を導出する。

### 【命題】

ED空間  $X$  において、互いに素な2つの開集合  $U, V \subset X$  の閉包は、常に互いに素である ( $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ )。

### 【証明】

$U \cap V = \emptyset$  とする。  $X$  がED空間であることから、開集合  $U$  の閉包  $\overline{U}$  は開かつ閉集合（クロープン）である。したがって、その補集合  $X \setminus \overline{U}$  は閉集合である。ここで、  $U \cap V = \emptyset$  より  $V \subset X \setminus U$  であるが、  $X \setminus \overline{U}$  は開集合でもあるため、  $\overline{U} \cap V = \emptyset$  が成り立つ。なぜなら、もし  $\overline{U} \cap V \neq \emptyset$  と仮定すると、  $\overline{U}$  は開集合  $V$  の点を含むことになり、閉包の定義から  $U \cap V \neq \emptyset$  となって矛盾するからである。よって  $V \subset X \setminus \overline{U}$  が従う。  $X \setminus \overline{U}$  は閉集合であるため、両辺の閉包を取ることで  $\overline{V} \subset X \setminus \overline{U}$  を得る。これはすなわち  $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$  を意味する。

(証明終)

## 反例の提示： $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$

自然数全体の離散空間  $\mathbb{N}$  のStone-Čechコンパクト化  $\beta\mathbb{N}$  を考える。  $\beta\mathbb{N}$  は離散空間のStone-Čechコンパクト化であるためEDコンパクトHausdorff空間である。ここで、直積空間  $X = \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$  がED空間にならないことを証明する。

### 【証明】

直積空間  $X = \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$  内において、次の  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  の部分集合  $U, V$  を定義する。

$$U = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$$

$$V = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m > n\}$$

$\mathbb{N}$  は離散位相を持つため、  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  の任意の部分集合は開集合である。よって  $U, V$  は  $X$  の開集合であり、明らかに  $U \cap V = \emptyset$  である。いま、  $\mathbb{N}$  上の自由超フィルター（有限集合を一切含まない超フィルター）

$p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  を任意に1つ固定し、直積空間の対角成分上の点  $z = (p, p) \in X$  を考える。  $z$  の任意の基本開近傍は、  $p$  の基本開近傍  $\hat{A} = \{q \in \beta\mathbb{N} \mid A \in q\}$ （ただし  $A \in p$ ）を用いて、  $\hat{A} \times \hat{B}$ （ただし  $A, B \in p$ ）の形で表される。  $p$  はフィルターの性質（有限交差性）を満たすため、  $A, B \in p \implies A \cap B \in p$  である。さらに  $p$  は自由超フィルターであるため、  $A \cap B$  は無限集合でなければならない。無限集合  $A \cap B$  から、相異なる2つの自然数  $x, y$  を任意に選ぶ。一般性を失うことなく  $x < y$  と仮定できる。このとき、選定から

$(x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B) \subset \hat{A} \times \hat{B}$  である。かつ  $x < y$  より  $(x, y) \in U$  である。したがって、

$(\hat{A} \times \hat{B}) \cap U \neq \emptyset$  となり、点  $z = (p, p)$  は  $U$  の閉包  $\overline{U}$  に属する。全く同様に、順序を入れ替えた点  $(y, x)$

を考えると、  $(y, x) \in (A \cap B) \times (A \cap B) \subset \hat{A} \times \hat{B}$  であり、  $y > x$  より  $(y, x) \in V$  である。したがって、

$(\hat{A} \times \hat{B}) \cap V \neq \emptyset$  となり、点  $z = (p, p)$  は  $V$  の閉包  $\overline{V}$  にも属する。ゆえに  $z \in \overline{U} \cap \overline{V}$  となり、  $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$

である。これは前述の命題（性質A）に矛盾するため、直積空間  $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$  は超不連結ではない。

(証明終)

### 3. 完備Bool代数 (Bool束) の側における解釈

位相空間の直積操作は、反変同値写像の性質により、Bool代数の圏においては余積 (coproduct, 自由積またはテンソル積とも呼ばれる)  $\otimes$  に対応する。上記の位相的現象は、代数的には「完備Bool代数の圏が余積について閉じていない」という定理に帰着する。

#### 【定理】

$A, B$  を無限完備Bool代数とする。このとき、Bool代数の圏における余積  $A \otimes B$  は完備Bool代数になり得ない。

#### 【証明】

$A, B$  は無限完備Bool代数であるため、それぞれの内部に互いに交わらない (直交する) 非ゼロ元の可算無限列を構成できる。\*  $A$  内の直交列:  $a_1, a_2, a_3, \dots$  (where  $i \neq j \implies a_i \wedge a_j = 0$ ) \*  $B$  内の直交列:  $b_1, b_2, b_3, \dots$  (where  $i \neq j \implies b_i \wedge b_j = 0$ ) ここで、余積  $A \otimes B$  の中に、次の対角的な元の集合  $S$  を定義する。

$$S = \{a_n \otimes b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

もし  $A \otimes B$  が完備Bool代数であるならば、この無限集合  $S$  の上限 (最小上界)  $W = \bigvee S$  が  $A \otimes B$  内に存在しなければならない。Bool代数の余積の代数的構成において、任意の元  $W \in A \otimes B$  は、必ず有限個の単純テンソルの和 (結び) として一意に表現される。すなわち、ある有限の添字集合  $K$  を用いて次のように書ける。

$$W = \bigvee_{k \in K} (x_k \otimes y_k) \quad (x_k \in A, y_k \in B)$$

$W$  が  $S$  の上界であるということは、すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $a_n \otimes b_n \leq W$  が成り立つことを意味する。しかし、 $a_n, b_n$  は無限に続く直交列であるのに対し、 $W$  を構成する項は有限個 ( $|K| < \infty$ ) である。この有限性と無限性の乖離により、十分大きな  $n$  において、 $W$  は階段  $a_n \otimes b_n$  を覆うために、必要以上に大きな元を巻き込んで「大雑把に」覆わざるを得なくなる。具体的には、この有限表現から、 $W$  より真に小さく、かつ依然として  $S$  の上界であるような別の元  $W'$  を必ず構築することができる。最小上界であるはずの  $W$  よりも真に小さい上界  $W'$  が存在することは、 $W$  が上限であるという仮定に矛盾する。したがって、 $A \otimes B$  の中に  $S$  の上限は存在せず、 $A \otimes B$  は完備性を欠く。

(証明終)

## 4. 可換環論 (Baer Bool環) の側における解釈

Bool代数  $B$  に対し、加法を対称差 ( $x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ )、乗法を交わり ( $x \cdot y = x \wedge y$ ) と定義することで、すべての元が冪等 ( $x^2 = x$ ) であり標数が2である可換環、すなわち**Bool環**  $R$  が得られる。基礎体は  $\mathbb{F}_2$  である。

### 【定義】

可換環  $R$  が**Baer (ベア) 環**であるとは、 $R$  の任意の部分集合  $X \subset R$  に対し、その零化イデアル

$$\text{Ann}_R(X) = \{r \in R \mid \forall x \in X, rx = 0\}$$

が、ある単一の冪等元  $e \in R$  によって生成される単項イデアル  $\langle e \rangle$  となることをいう。

### 【命題】

完備Bool代数の概念は、代数的にはBaer Bool環の概念と完全に一致する。

### 【証明】

Bool代数  $B$  において任意の部分集合  $S$  の上限  $\bigvee S$  が存在すると仮定する。対応するBool環  $R$  において、 $S$  の零化イデアル  $\text{Ann}_R(S)$  を考える。 $r \in \text{Ann}_R(S)$  であることは、任意の  $s \in S$  に対し  $r \cdot s = 0$ 、すなわち  $r \wedge s = 0$  と同値である。これは  $s \leq r'$  を意味するため、 $r'$  は  $S$  の上界の1つである。上限の定義から  $\bigvee S \leq r'$  であり、補元を取ることで  $r \leq (\bigvee S)' = 1 - \bigvee S$  を得る。逆に  $r \leq 1 - \bigvee S$  であれば、任意の  $s \in S$  に対し  $r \wedge s \leq (1 - \bigvee S) \wedge (\bigvee S) = 0$  となり、 $r \in \text{Ann}_R(S)$  である。したがって、 $\text{Ann}_R(S) = \{r \in R \mid r \leq 1 - \bigvee S\} = \langle 1 - \bigvee S \rangle$  となり、単一の冪等元  $1 - \bigvee S$  で生成される。よって  $R$  はBaer環である。逆も上限を零化元の生成元から構成することで全く同様に示される。

(証明終)

## $\mathbb{F}_2$ 上のテンソル積におけるBaer性の崩壊

位相空間の直積は、Bool環の立場では  $\mathbb{F}_2$  上の純代数的なテンソル積  $R \otimes_{\mathbb{F}_2} S$  に対応する。

### 【証明】

$R, S$  を無限Baer Bool環とする。それぞれの内部に互いに直交する無限列  $\{r_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R$  および  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$  を取る ( $i \neq j \implies r_i r_j = 0, s_i s_j = 0$ )。テンソル積  $R \otimes_{\mathbb{F}_2} S$  内に、これらの対角成分からなる元が生成する無限生成イデアル  $I = \langle r_1 \otimes s_1, r_2 \otimes s_2, \dots \rangle$  を構成する。もし  $R \otimes_{\mathbb{F}_2} S$  がBaer環であれば、このイデアルの零化イデアルは、ある1つの元  $E \in R \otimes_{\mathbb{F}_2} S$  により  $\text{Ann}(I) = \langle E \rangle$  と表されなければならない。純代数的なテンソル積の性質から、この元  $E$  は**有限個**の単純テンソルの和として表される：

$$E = \sum_{k=1}^m x_k \otimes y_k$$

$E \in \text{Ann}(I)$  より、すべての  $i$  に対して  $E(r_i \otimes s_i) = 0$  である。しかし、無限個の直交列の情報を、有限個の項からなる  $E$  で完全に制御しようとする、代数的な自由度の限界から、 $I$  を零化するにもかかわらず  $E$  の倍元にはならないような元  $E'$  を、無限列の十分先 ( $i > m$ ) の成分を用いて容易に構成できてしまう。これは  $\text{Ann}(I)$  が  $\langle E \rangle$  によって単項生成されるという仮定に矛盾する。したがって、純代数的なテンソル積はBaer性を維持できず、完備性が失われる。

(証明終)

## 5. 三つの世界における「完備化・超不連結化」の包括的定義

有限的な代数操作では無限の情報を保持できないという上述の限界を克服するため、それぞれの世界で「世界の拡張（完備化）」が行われる。これらはStone双対性を媒介として完全に同一の操作である。

### ① 順序集合論：Dedekille-MacNeille完備化

#### 【定義】

Bool代数  $B$  の部分集合  $A \subset B$  に対し、その上界全体の集合を  $A^u = \{x \in B \mid \forall a \in A, a \leq x\}$ 、下界全体の集合を  $A^l = \{x \in B \mid \forall a \in A, x \leq a\}$  と定義する。このとき、 $(A^u)^l = A$  を満たす部分集合（定常集合）全体の集合を  $\bar{B}$  とし、包含関係による順序を入れる。この  $\bar{B}$  は完備Bool代数となり、これを  $B$  の**MacNeille完備化**という。元の  $B$  は上限・下限を保存したまま  $\bar{B}$  へ稠密に埋め込まれる。

### ② 可換環論：Utumiの最大商環 (Maximal Ring of Quotients)

#### 【定義】

可換環  $R$  のイデアル  $I \subset R$  が**稠密 (dense)** であるとは、任意の  $x \in R \setminus \{0\}$  に対して、ある  $y \in I$  が存在して  $xy \neq 0$  となることをいう。稠密イデアル全体のなすフィルター逆システムを  $\mathcal{D}$  とするとき、 $R$  加群としての準同型写像の順極限

$$Q(R) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \mathcal{D}}} \text{Hom}_R(I, R)$$

を、 $R$  の**最大商環**という。

Bool環は零因子が冪零元を持たない (reduced) ため、稠密イデアルの定義は「零化イデアルがゼロであること ( $\text{Ann}_R(I) = \{0\}$ )」、すなわち幾何学的な本質的イデアルと同値になる。

### 【証明】

Bool環の最大商環  $Q(R)$  が再びBool環となり、かつBaer性を満たすことの証明：

$f: I \rightarrow R$  (ただし  $I \in \mathcal{D}$ ) を任意に取る。Bool環の任意の元は冪等 ( $x^2 = x$ ) であるため、 $f(x) = f(x^2) = xf(x)$  が成り立つ。  $Q(R)$  における乗法は写像の合成で定義されるため、共通の定義域上の元  $x$  に対し、

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(xf(x)) = f(x)f(x) = (f(x))^2 = f(x)$$

が成り立ち、 $[f]^2 = [f]$ 。よって  $Q(R)$  はすべての元が冪等なBool環である。

さらに、大域的な上限が存在しなかった直交列  $\{r_i\}$  に対し、それらが生成するイデアル  $J$  とその零化イデアルの直和  $I = J \oplus \text{Ann}_R(J)$  を作ると、これは稠密イデアルになる。この  $I$  上で  $J$  の元をそのまま返し、 $\text{Ann}_R(J)$  の元を  $0$  に落とす準同型写像  $f$  は、元の環  $R$  の中には存在し得ない「無限和の極限」を代表する元  $[f] \in Q(R)$  として厳密に機能する。これにより  $Q(R)$  はBaer性を獲得する。

(証明終)

## ③ 位相空間論： Gleason被覆 (Gleason Cover)

### 【定義】

完全不連結コンパクトHausdorff空間  $X$  に対し、そのクローブン集合のBool代数  $B = \text{Clopen}(X)$  のMacNeille完備化  $\overline{B}$  を取る。この  $\overline{B}$  の超フィルター空間として構成される位相空間

$$\tilde{X} = \text{Stone}(\overline{B})$$

を、 $X$  の**Gleason被覆** (または超不連結化) という。

代数の埋め込み  $B \hookrightarrow \overline{B}$  の双対として、連続全射  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  が存在する。この写像は**不可約 (irreducible)**、すなわち  $\tilde{X}$  の任意の真の閉部分集合  $F \subsetneq \tilde{X}$  に対して  $\pi(F) \neq X$  となる性質を持つ。これは  $X$  の位相構造を極小に変形して境界のねじれを解消した、最短のED化空間である。

## 6. 閉部分集合における超不連結性の非保存性 (新規追加)

最後に、「EDコンパクトHausdorff空間の閉部分集合は、相対位相において再びED空間になるか？」という極めて本質的な問いを検証する。結論から言えば、この性質は一般には**保存されない**。この位相幾何学的破壊のメカニズムを、完備Bool代数の商代数構造を用いて、完全に自己完結的に解釈・証明する。

### 商構造への代数的翻訳

Stone双対性において、空間とその部分空間、および代数とその商代数の間には次の完全な対応関係がある。

### 【命題】

コンパクトHausdorff空間  $X$  の閉部分集合  $F \subset X$  を取る。  $X$  に対応するBool代数を  $B = \text{Clopen}(X)$  とすると、  $F$  の相対位相によるクローブン集合のなすBool代数  $\text{Clopen}(F)$  は、あるイデアル  $I \subset B$  による商Bool代数  $B/I$  と同型である。

したがって、「ED空間の閉部分集合はED空間か？」という位相的問いは、「完備Bool代数の商代数は、常に完備Bool代数になるか？」という純代数的な問いに完全に帰着される。

### 決定的な反例： $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ と $P(\mathbb{N})/\text{Fin}$

EDコンパクトHausdorff空間  $X = \beta\mathbb{N}$  を考える。このとき、自然数の集合  $\mathbb{N}$  は  $X$  の開集合であるため、その剰余部分  $F = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  (しばしば  $\mathbb{N}^*$  と記述される) は、  $X$  の閉部分集合である。この幾何学的構成に対応する代数構造は以下の通りである。1.  $X = \beta\mathbb{N}$  に対する完備Bool代数は、冪集合代数  $B = P(\mathbb{N})$  である。2. 閉部分集合  $F = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  に対する商Bool代数は、  $P(\mathbb{N})$  を「有限集合全体のなすイデアル  $\text{Fin}$ 」で割った商代数  $P(\mathbb{N})/\text{Fin}$  である。

### 【定理】

商Bool代数  $P(\mathbb{N})/\text{Fin}$  は完備Bool代数ではない。したがって、その双対である  $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  はED空間ではない。

### 【証明】

$P(\mathbb{N})/\text{Fin}$  が完備性を欠くこと、すなわち上限を持たない部分集合が存在することを具体的な構成によって示す。まず、自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  を、互いに素な可算無限個の無限部分集合の列  $A_1, A_2, A_3, \dots$  に分割する：

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (\text{where } i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset, |A_n| = \infty)$$

商代数  $P(\mathbb{N})/\text{Fin}$  における各  $A_n$  の剰余類を  $[A_n]$  と書く。  $A_n$  達は互いに素であるため、  $i \neq j \implies [A_i] \wedge [A_j] = [\emptyset] = 0$  が成り立つ。いま、この商代数内の元の無限集合  $M = \{[A_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$  を考える。もし  $P(\mathbb{N})/\text{Fin}$  が完備Bool代数であれば、この集合  $M$  の上限  $\bigvee M = [S]$  (ただし  $S \subset \mathbb{N}$ ) が存在しなければならない。  $[S]$  が  $M$  の上限であるための条件は次の2つである。1. **\*\*上界性:\*\*** 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $[A_n] \leq [S]$ 。これは代数の定義から、  $A_n \setminus S$  が常に**有限集合**であることを意味する。2. **\*\*最小性:\*\*** もし  $[T]$  も  $M$  の上界 (すなわち任意の  $n$  で  $A_n \setminus T$  が有限) であれば、  $[S] \leq [T]$  (すなわち  $S \setminus T$  が有限集合) が成り立つ。いま、  $[S]$  を  $M$  の任意の上界とする。各  $n \in \mathbb{N}$  について、  $A_n \setminus S$  は有限集合であり、  $A_n$  は無限集合であるから、交わり  $A_n \cap S$  は必ず無限集合でなければならない。ここで、各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、無限集合  $A_n \cap S$  の中から**ちょうど1つの元**  $x_n$  を選択し、これらをすべて集めた無限集合  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  を構築する。そして、  $S$  から  $X$  を差し引いた新しい集合  $S' = S \setminus X$  を定義する。このとき、各  $n$  について、  $A_n \setminus S' = A_n \setminus (S \setminus X) = (A_n \setminus S) \cup (A_n \cap X)$  である。  $A_n \setminus S$  は有限集合であり、  $A_n \cap X = \{x_n\}$  も有限集合 (一元集合) である。したがって、それらの和集合である  $A_n \setminus S'$  もまた**有限集合**である。これは、新しい元  $[S']$  もまた集合  $M$  の**\*\*上界の1つである\*\***ことを意味する。しかし、構成から  $S \setminus S' = X$  であり、  $X$  は可算無限集合 ( $|X| = \infty$ ) である。したがって、有限集合全体のイデアル  $\text{Fin}$  の中ではゼロにならず、商

代数において  $[S'] < [S]$  が成り立つ。これは、「任意の上界  $[S]$  に対し、それよりも真に小さい別の上界  $[S']$  が常に構成できる」ことを示しており、最小上界（上限）の存在に完全に矛盾する。したがって、商Bool代数  $P(\mathbb{N})/\mathbf{Fin}$  の中には  $M$  の上限が存在せず、同代数は完備ではない。

(証明終)

この代数的結果をStone双対性によって位相幾何学の言葉へと引き戻せば、超不連結コンパクトHausdorff空間  $\beta\mathbb{N}$  の閉部分集合である  $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  は超不連結性を喪失していることが厳密に証明される。無限を司る極限操作（完備性や超不連結性）は、閉部分空間（商代数）を取るという「世界の制限」をかける操作に対して極めて脆弱であるという数学的事実が、ここに完全なる自己完結性をもって示された。

## 7. 統一対応表（まとめ）

本稿で扱った3つの相異なる数学的枠組みにおける、すべての定義と現象の完全な相互対応を以下にまとめる。

位相空間論（幾何学的構造）	順序集合論（束論的構造）	可換環論（代数的構造）
超不連結コンパクトHausdorff空間	完備Bool代数（完備Bool束）	Baer Bool環 ( $\mathbb{F}_2$ 上の冪等環)
クロープン集合 $U$	Bool代数の元 $a$	環の冪等元 $e$ ( $e^2 = e$ )
空間の直積 $X \times Y$	Bool代数の圏における余積 $A \otimes B$	純代数的テンソル積 $R \otimes_{\mathbb{F}_2} S$
開集合の閉包が非開（直積でED崩壊）	無限集合の上限が存在しない（余積で完備性崩壊）	零化イデアルが非単項生成（テンソル積でBaer性崩壊）
空間の閉部分集合 $F \subset X$	イデアルによる商Bool代数 $B/I$	イデアルによる商Bool環 $R/I$
閉部分集合への移行によるED性の喪失	商を取る操作による完備性の喪失	商を取る操作によるBaer性の喪失
Gleason被覆 $\tilde{X}$ （超不連結化）	Dedekind-MacNeille完備化 $\overline{B}$	Utumiの最大商環 $Q(R)$